Corrigé exercice 143 :

1. a. On résout : $z^2+z-1=0$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 5 > 0$.
   Il existe deux solutions $z_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

   b. Les racines 5-ième de l'unité sont les nombres complexes $z_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{5}\right)$, avec k compris entre 0 et 4.
   Donc : $z_0 = e^{0\times i} = 1$, $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $z_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}$, $z_3 = e^{\frac{6i\pi}{5}}$, $z_4 = e^{\frac{8i\pi}{5}}$
   Les points d'affixes les racines 5-ième de l'unité forment un pentagone régulier, d'après le cours.

2. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}} = z_1$.

   a. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = \dfrac{1-\omega^5}{1-\omega} = \dfrac{1-1}{1-\omega} = 0$ car ω est une racine 5-ième de l'unité.

   b. On a : $\overline{\omega^2} = \overline{\exp\left(\dfrac{4i\pi}{5}\right)} = \exp\left(-\dfrac{4i\pi}{5}\right) = \exp\left(\dfrac{6i\pi}{5}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right)\right)^3 = \omega^3$
   De plus :
   $\overline{\omega} = \overline{\exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right)} = \exp\left(-\dfrac{2i\pi}{5}\right) = \exp\left(\dfrac{8i\pi}{5}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right)\right)^4 = \omega^4$

3. a. On déduit de la question précédente :

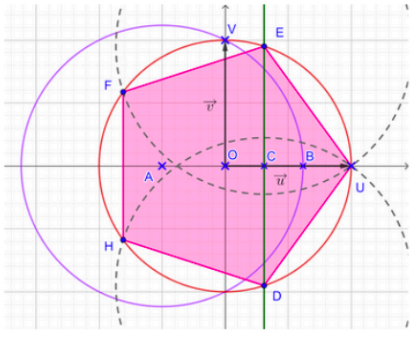
$$\begin{aligned}(\omega+\overline{\omega})^2+\omega+\overline{\omega}-1 &= \omega^2+\overline{\omega}^2+2\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}-1\\ &= \omega^2+\omega^3+2\omega\omega^4+\omega+\omega^4-1\\ &= \omega+\omega^2+\omega^3+2\omega^5+\omega^4-1\\ &= \omega+\omega^2+\omega^3+2\times 1+\omega^4-1\\ &= \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+1\\ &= 0\end{aligned}$$

   $\omega+\overline{\omega}$ est donc solution de (E).

   b. On sait que $\omega+\overline{\omega} = 2\mathrm{Re}(\omega) = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$.
   $\omega+\overline{\omega}$ est donc une solution de (E) positive, d'où d'après la question 1 : $\omega+\overline{\omega} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Donc $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Or : $\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = 1$, d'où $\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+5}{8}$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{2(\sqrt{5}+5)}}{4}$, puisque $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$

4. a. On nomme B le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de la demi-droite $[OU)$.
   B a donc une affixe réelle positive, notée x.
   On sait que $AB = AV$, soit $\left|x+\dfrac{1}{2}\right| = \left|i+\dfrac{1}{2}\right|$.
   En mettant l'égalité précédente au carré, on obtient :

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} &\Leftrightarrow x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x+\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x+\frac{1}{2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

   x est positif donc $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

   b. On place C le milieu de $[OB]$. C a donc pour affixe $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$.
   On trace ensuite la droite d d'équation $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$, qui permet d'obtenir les points d'intersection avec le cercle trigonométrique d'affixe ω et ω^4.
   On reporte sur le cercle l'écart entre U et le point d'affixe ω pour obtenir les deux autres sommets manquants. On obtient ainsi la construction, à la règle non graduée et au compas, d'un pentagone régulier.